Operativne krive

1. Na ulaznu kontrolu kvaliteta stižu proizvodi u serijama od po 10.000 komada, nivoa kvaliteta od 1%. Primenom na statistici odabranog uzorka iz svake serije uzima se 89 komada i vrši kontrolisanje odnosnih karakteristika kvaliteta. Maksimalno dozvoljeni broj neusaglašenih jedinica u uzorku je 2. Dovoljno je da su jedinice neusaglašene po bar jednoj od karakteristika kvaliteta da bi se jedinica proizvoda smatrala neusaglašenom. Potrebno je:

a) Odrediti, imenovati i označiti sve značajne pojmove u vezi datog zadatka.
b) Izabrati odgovarajuću teoretsku rapodelu verovatnoća za proračun verovatnoća prihvatanja serije.
c) Proračunati verovatnoću da se u uzorku pronađe manji ili jednak broj neusaglašenih u odnosu na dozvoljeni broj neusaglašenih u uzorku 2.

Rešenje:

a) N= 10000 kom, n=89, p=1%=0,01, c=2 kom

b) Obzirom da je $\frac{n}{N} = \frac{89}{10000} = 0{,}0089 \leq 0{,}1$ serija se može smatrati dovoljno velikom i teoretski beskonačnom u odnosu na uzorak te možemo primeniti binomni zakon proračuna verovatnoća.

c) Verovatnoća uočavanja **c** neusaglašenih u uzorku veličine **n** je

$$P(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Verovatnoća da se u uzorku pronađe x manje ili jednako c se proračunava primenom prethodno date formule

$$P(x \leq c) = \sum_{x=0}^{c} \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

za p=0,01, n=89 i c=2 (gde je c maksimalni dozvoljeni broj loših u uzorku) onda se verovatnoća prihvatanja Pa ovakve serije može proračunati kao:

$$Pa = P(x \leq 2) = \sum_{x=0}^{2} \frac{89!}{x!(89-x)!} 0{,}01^x (0{,}99)^{89-x} = \frac{89!}{0!89!}(0{,}01)^0(0{,}99)^{89} + \frac{89!}{1!88!}(0{,}01)^1(0{,}99)^{88} + \frac{89!}{2!87!}(0{,}01)^2(0{,}99)^{87} = 0{,}9397$$

Dakle verovatnoća da se u uzorku veličine 89 nađe manje ili jednako 2 neusaglašena iznosi 94% tj. verovatnoća prihvatanja serije je u ovom slučaju iznosi 94%.

2. Za slučaj prethodnog zadatka potrebno je dodatno:

a) prikazati operativnu krivu i označiti osnovne veličine koje ga određuju
b) proračunati prosečan izlazni kvalitet i prosečan obim kontrole u datom slučaju
c) prikazati krivu promene vrednosti AOQ u zavisnosti od različitog nivoa kvaliteta serije

Rešenje:

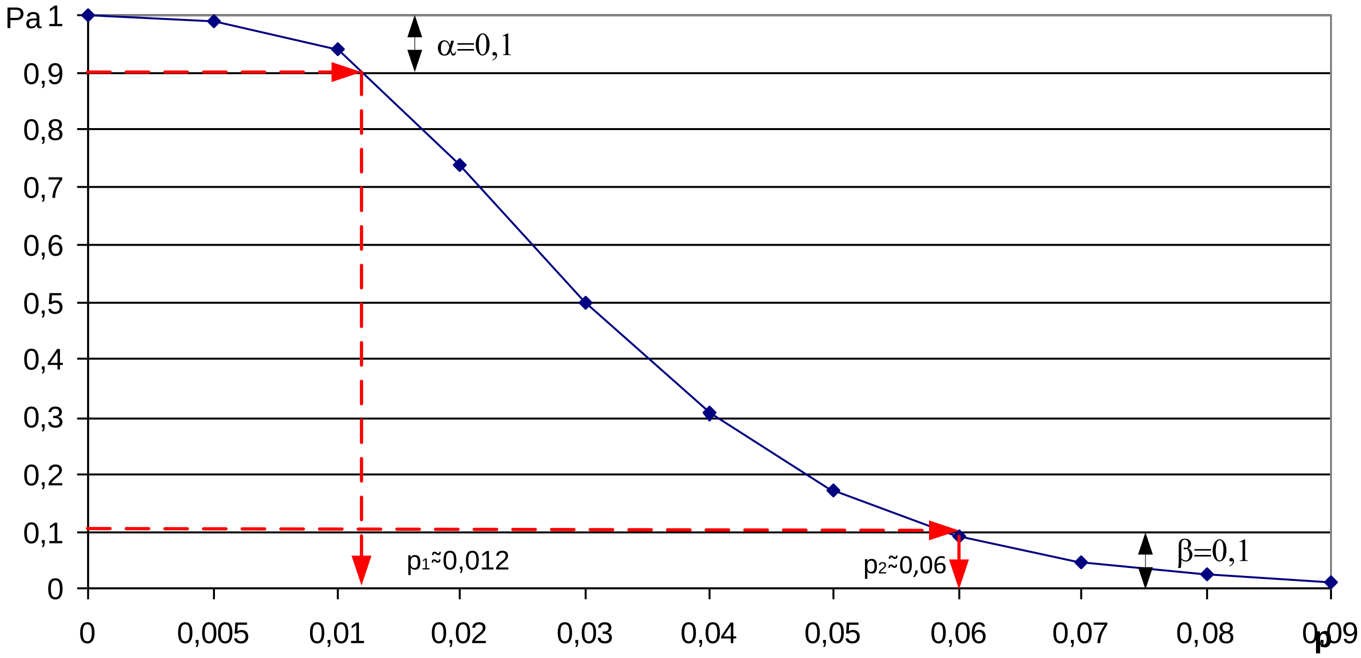
a) prikazati operativnu krivu i označiti osnovne veličine koje ga određuju

Kao prvi korak neophodno je proračunati određen broj vrednosti verovatnoća Pa na osnovu različitih nivoa kvaliteta serije p kako bi se izvršila aproksimacija operativne krive. Slučaj određivanja ostalih verovatnoća za slučaj promenjivog p, i za zadato n=89 i c=2, dat je u drugoj koloni tabelie 1.

Tabela1

p	Pa	P*Pa	AOQ
0,005	0,9897	0,004949	0,004904
0,01	0,9397	0,009397	0,009313
0,02	0,7366	0,014732	0,014601
0,03	0,4985	0,014955	0,014822
0,04	0,3042	0,012168	0,01206
0,05	0,1721	0,008605	0,008528
0,06	0,0919	0,005514	0,005465
0,07	0,0468	0,003276	0,003247
0,08	0,023	0,00184	0,001824
0,09	0,0109	0,000981	0,000972

Osnovne veličina koje određuju jedan plan prijema su: p1 i p2 za zadate vrednosti α i β. Ako vrednosti α i β nisu zadate zadatkom pretpostaviti ih kao uobičajeno α= β=0,1.



Slika 1. Operativna krivu na bazi binomne raspodele verovatnoća za n=89 i c=2

b) proračunati prosečan izlazni kvalitet i prosečan obim kontrole u datom slučaju.

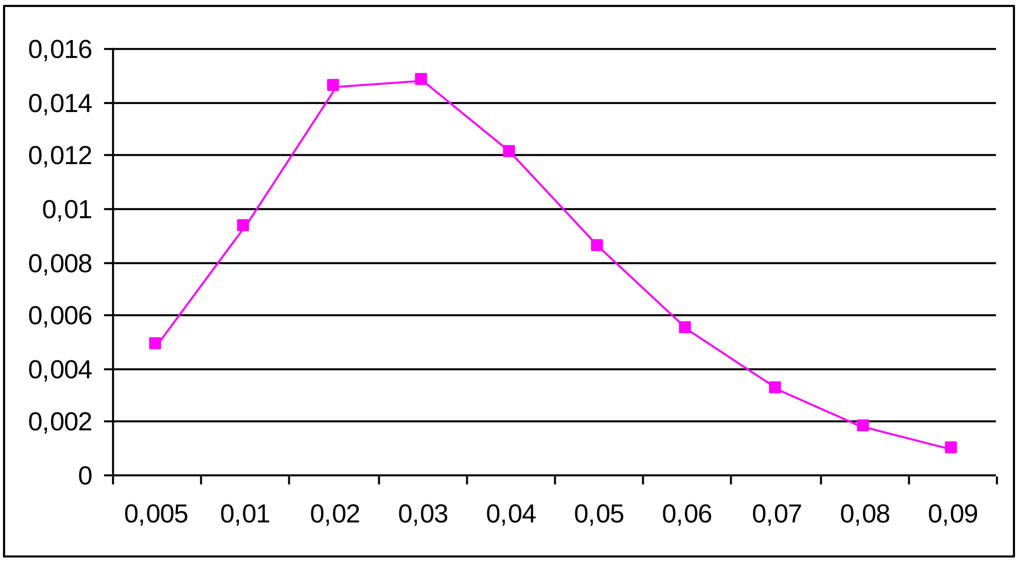
Prosečan izlazni kvalitet AOQ za p=0,01, N=10000 i n=89 iznosi

$$AOQ = \frac{Pa \cdot p(N-n)}{N} = \frac{(0{,}93979)(0{,}01)(10000-89)}{10000} = 0{,}0093 = 0{,}93\%$$

Prosečan obim kontrole ATI za navedene vrednosti iznosi:

$$ATI = n + (1 - Pa)(N - n) = 89 + (1 - 0{,}9397)(10000 - 89) = 687$$

c) Videti proračun AOQ=f(p) iz tabele 1 (četvrta kolona) za različite vrednosti p. Aprokisimacija krive pomene vrednosti AOQ u funciji p data je na slici 2.



Slika 2. Raspodela AOQ za (N=10000, n=89 **i c=2) različite vrednosti p**

3. Proizvođač je naručiocu isporučio 100 serija delova.. U svakoj seriji nalazi se po 10000 delova. Prijemna kontrola se obavlja jednostrukim planom prijema: veličina uzorka n=300 i dozvoljen broj neusaglašenih proizvoda u uzorku c=5.

Odrediti:

a) Operativnu krivu na bazi Poasonove raspodele verovatnoća
b) Vrednosti p1 i p2 za uvrđene vrednosti α=0,05 i β=0,1.
c) Verovatnoću prihvatanja serije pretpostavljneog ulaznog kvaliteta p=0,025
d) Prosečni izlazni nivo kvaliteta AOQ ili Ppik celokupne isporuke (100 serija) ulaznog kvaliteta p=0,025
e) Broj defektnih delova u svih 100 isporučenih serija nakon izvršenog prijema za pretpostavljeni ulazni kvalitet.
f) Odrediti vrednosti prosečnog obima kontrole ATI za pretpostavljeni ulazni kvalitet.

Rešenje:

a) Polazimo od formule za Poasonovu raspodelu verovatnoća:

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

Ako se za pretpostavljenu veličinu uzorka i očekivani kvalitet serije može konstanta λ uzeti kao λ = np onda se prethodni obrazac može transformisati kao:

$$P(x) = \frac{e^{-np}(np)^x}{x!}$$

Odnosno verovatnoća prihvatanja serije za zadati ulazni parametar c iznosi:

$$P(x \le c) = \sum_{x=0}^{c} \frac{e^{-np}(np)^x}{x!}$$

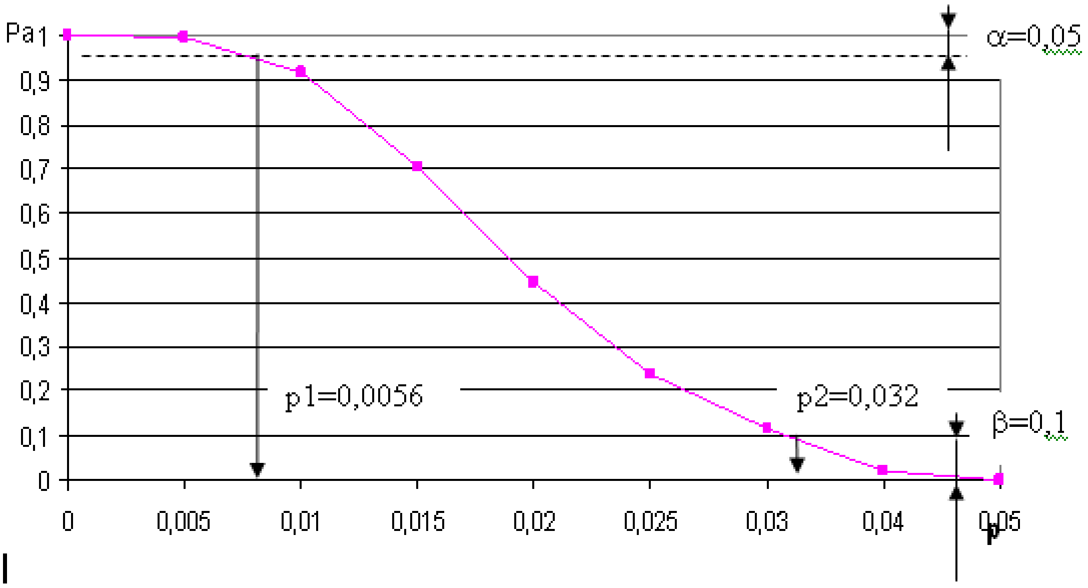
Operativna kriva se može dobiti unosom parova podataka na kordinatni sistem (Pa, p) dobijenih proračunom verovatnoća prihvatanja serija za zadato n i c, u zavisnosti od promenjivog nivoa kvaliteta serije p.

Međutim, kao jednostavan alat moguće je koristiti tabelu 1.2 dodataka sa tablicama koja za različite vrednosti proizvoda np i parametar c projektuje vrednosti verovatnoća proračunatih upotrebom formule za Poasonovu raspodelu verovatnoća.

Prema prethodno navedenoj tabeli za različite vrednosti p moguće je proračunati korespodentnu vrednost np i za c=5 očitati pripadajuće vrednosti verovatnoća prihvatanja serija u tom slučaju Pa prikazanih u tabeli 2.

Tabela 2

p	np	Pa
0,005	1,5	0,9955
0,01	3	0,916
0,015	4,5	0,703
0,02	6	0,446
0,025	7,5	0,24
0,03	9	0,116
0,04	12	0,02
0,05	15	0,001



Slika 3. Operativnu krivu na bazi Poasonove raspodele verovatnoća za n=300 i c=5

b) i c) videti Sliku 3. gde se može očitati za vrednosti **α=0,05 , p1=0,0056 i za β=0,1, p2=0,032**

d) Za p=0,025, N=10000; n=300, Pa=0,24 - Vidi tabelu 2 za proračun!!!!!

$$AOQ = Pa \cdot p \cdot \left(1 - \frac{n}{N}\right) = 0,24 \cdot 0,025 \cdot \left(1 - \frac{300}{10000}\right) = 0,0058$$

e) Broj defektnih delova (Nd) nakon kontrole 100 serija uz upotrebu ovako projektovanog plana prijema i za ulazne parametre p=0,025, n=300 i c=5, kao i proračunate verovatnoće Pa=0,24, može se odrediti iz formule:

$$Nd = t \cdot p \cdot (N - n)$$

Gde je:
t- broj serija prihvaćenih sistemom uzorkovanja
N-n – broj nepregledanih delova sa postotkom p defektnih za slučaj prihvatanja serije na osnovu uzetog uzorka

Ako je verovatnoća prihvatanja serija za zadate ulazne parametre i za Pa=0,24 onda će broj prihvaćenih serija od 100 isporučenih biti:

$t = Pa \cdot 100 = 24$ prihvaćene serije

To znači da će se 24 isporuka prihvatiti nakon uzorkovanja, dok će preostalih 76 biti prekontrolisane 100% kontrolom pa u <u>tih 76% isporučenih serija neće biti defektnih delova</u> (posle 100% kontrole i zamene neusaglašenih komada). U 24 isporučenih serija koje su prihvaćene uzorkovanjem može se očekivati ukupno:

$Nd = t \cdot p \cdot (N - n) = 24 \cdot 0{,}025 \cdot (10000 - 300) = 5820$ defektnih proizvoda

f) **Prosečni obima kontrole ATI za pretpostavljene ulazne parametre, n, N, c i proračunato Pa=0,24 iznosi:**

$ATI = n + (1 - Pa) \cdot (N - n) = 300 + (1 - 0{,}24) \cdot (10000 - 300) = 7672$ proizvoda

Dakle, ako serije dolaze sa kvalitetom od p=2,5% neusaglašenih očekivano je da će prosečni obim pregledanih proizvoda iznositi 7672 kom

4. Za plan uzorka izvučenog iz velikog osnovnog skupa ako je n=40 i c=2 odrediti:

- **a) Operativnu krivu.**
- **b) Vrednosti nivoa kvaliteta za prijem i odbijajućeg nivoa kvaliteta ako su vrednosti α=0,05 i β=0,1.**
- **c) Odrediti neutralni nivo kvaliteta.**
- **d) Nacrtati operativnu kriva za 100% kontrolu gde je dozvoljeni procenat loših komada p=5%.**

Rešenje:

a) Pošto je naglašeno da se radi o velikom osnovnom skupu za koji je odabrani uzorak značajno mali radi se o binomnoj raspodeli verovatnoća.

$$P(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Verovatnoća da se u uzorku pronađe x manje ili jednako c se proračunava primenom prethodno date formule

$$P(x \le c) = \sum_{x=0}^{c} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Primer za p=0,01 daje vrednost verovatnoće prihvatanja serije za n=40 i c=2

$$Pa = P(x \le 2) = \sum_{x=0}^{2} \binom{40}{x} 0{,}01^x (1-0{,}01)^{40-x} = \binom{40}{0} 0{,}01^0 (0{,}99)^{40-0} + \binom{40}{1} 0{,}01^1 (0{,}99)^{40-1} + \binom{40}{2} 0{,}01^2 (0{,}99)^{40-2}$$

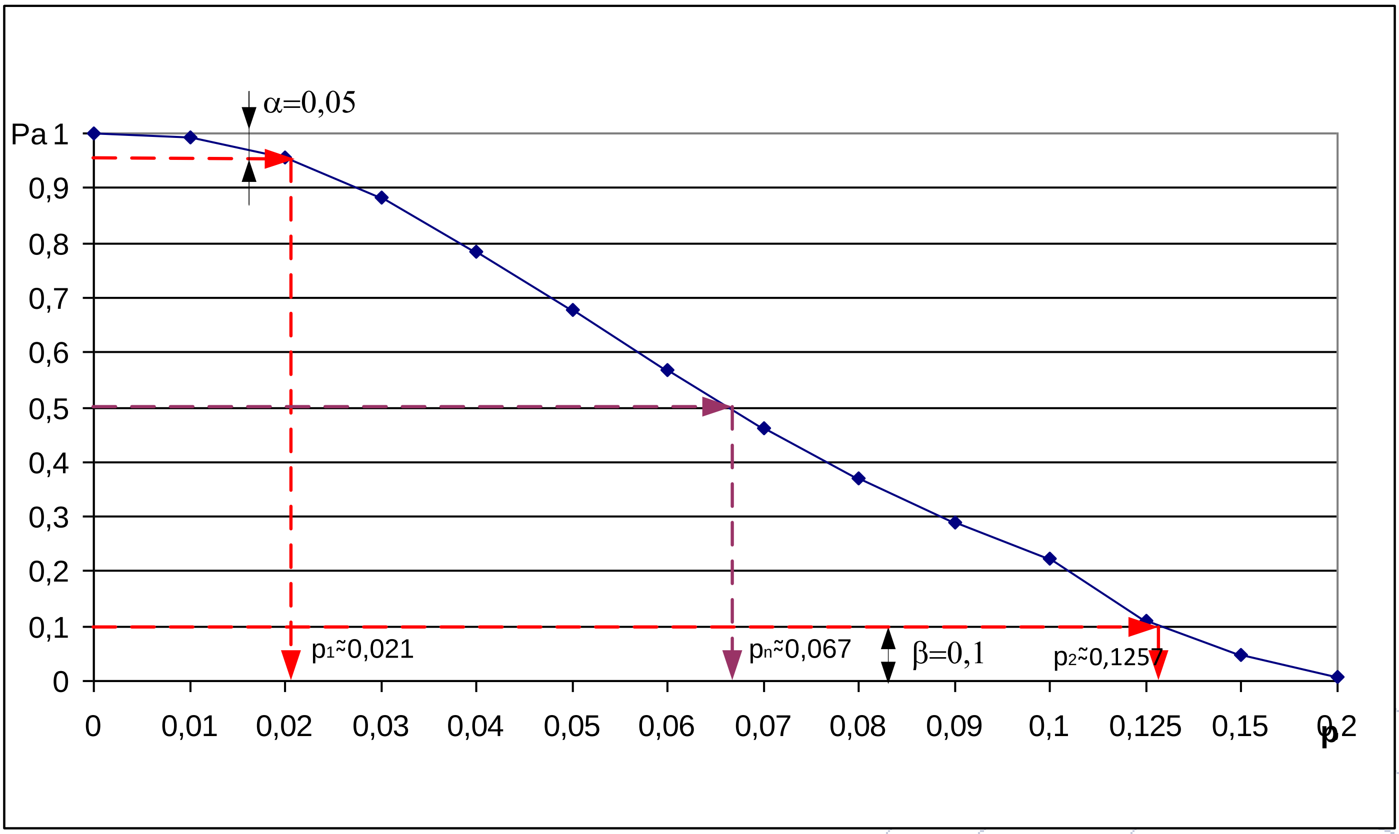
$$= 0{,}6690 + 40 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}6757 + \left(\frac{39 \cdot 40}{2}\right) 0{,}0001 \cdot 0{,}6826 = 0{,}6690 + 0{,}2703 + 0{,}0532 = 0{,}9925$$

U cilju izrade operativne krive neophodno je izračunati verovatnoće prihvatanja serije za dodatne vrednosti p, kao što je npr. p= 0,02 ; 0,03; ... 0,1. U tom slučaju primenom prethodne formule dobijamo sledeće vrednosti date u tabeli 3:

Tabela 3

p	Pa	p	Pa
0	1	0,07	0,46
0,01	0,99	0,08	0,37
0,02	0,95	0,09	0,29
0,03	0,88	0,1	0,22
0,04	0,79	0,125	0,11
0,05	0,68	0,15	0,05
0,06	0,57	0,2	0,01

Na osnovu prethodnih vrednosti iz tabele 3 moguće je prikazati operativnu krivu kao na slici 4.

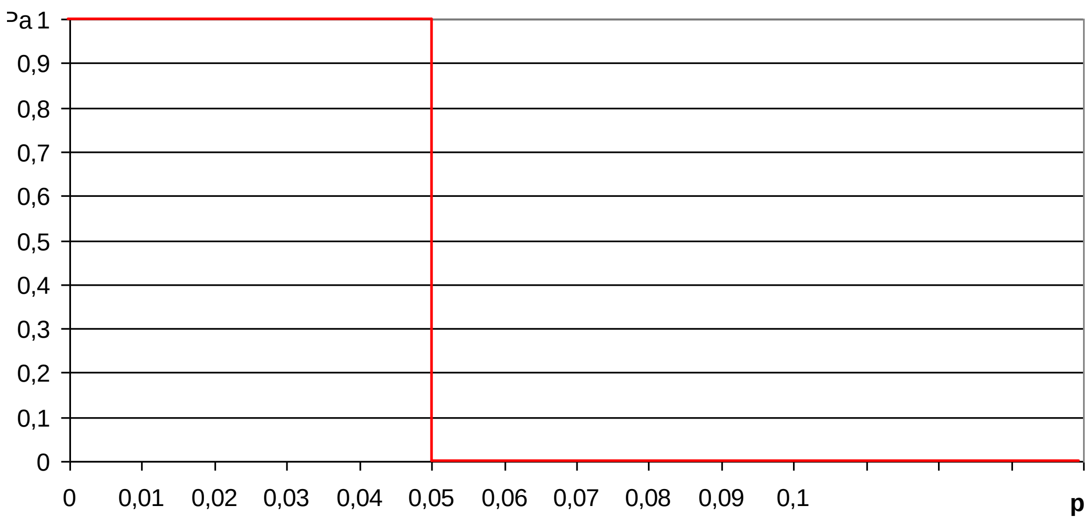


Slika 4. Operativna krivu na bazi binomne raspodele verovatnoća za n=40 i c=2

b) Vrednosti nivoa kvaliteta za prijem p_α i odbijajućeg nivoa kvaliteta p_β kao i neutralni nivo kvaliteta se očitavaju sa slike 4.

c) Vrednost neutralnog nivoa kvaliteta p_n koji odgovara Pa=0,5 se očitava sa slike 4.

d) Nacrtati operativnu kriva za 100% kontrolu gde je dozvoljeni procenat loših komada p=5%.



Slika 5. Operativna krivu za 100% QC gde za p=5%.

Za slučaj 100% QC svi proizvodi u isporuci biće pregledani i ne postoji rizik proizvođača i rizik kupca u tom slučaju. Kontrolom će se utvrditi stvarni procenat loših u seriji i ako je on manji od p=5% serija će uvek biti prihvaćena (bez rizika donošenja pogrešne odluke), ali i suprotno, za veći procenat od 5% biće odbijena (bez rizika donošenja pogrešne odluke tj. prihvatanja loše serije)

Sekvencijalni planovi prijema

5. Za date vrednosti p1=0,3 i p2=0,4, α=0,1 i β=0,1:

a) Razviti sekvencijalni jednoelementni plan prijema
b) Doneti odluku o prihvatanju serije od isporučenih 1000 delova ako je nakon 8 ukupno pregledanih komada u uzorku otkriveno 6 defektnih. Kakva je odluka za slučaj otkrivanja 4 defektna dela u naredna 4 uzeta uzorka za kontrolu.

Rešenje:

a) Sekvencijalni jednoelementni plan prijema određuju dve prave definisane jednačinama u kordinatnom sistemu (n- broj uzorkovanih i kontrolisanih jedinica, X - broj defektnih jedinica), i to

Xr= h2+sn (linija odbijanja)

Xa= - h1+sn (linija prihvatanja)

$$h_1 = \left(\log \frac{1-\alpha}{\beta}\right) / k$$

$$h_2 = \left(\log \frac{1-\beta}{\alpha}\right) / k$$

$$k = \log \frac{p_2(1-p_1)}{p_1(1-p_2)}$$

$$s = \left(\log \frac{1-p_1}{1-p_2}\right) / k$$

Zamenom vrednosti p1=0,3 i p2=0,4, α=0,1 i β=0,1 u prethodnim obrascima dobijaju se vrednosti:

$$k = \log \frac{p_2(1-p_1)}{p_1(1-p_2)} = \log \frac{0{,}4(1-0{,}3)}{0{,}3(1-0{,}4)} = 0{,}192$$

$$h_1 = \left(\log \frac{1-\alpha}{\beta}\right) / k = \left(\log \frac{1-0{,}1}{0{,}1}\right) / 0{,}192 = 4{,}973$$

$$h_2 = \left(\log \frac{1-\beta}{\alpha}\right) / k = \left(\log \frac{1-0{,}1}{0{,}1}\right) / 0{,}192 = 4{,}973$$

$$s = \left(\log \frac{1-p_1}{1-p_2}\right) / k = \left(\log \frac{1-0{,}3}{1-0{,}4}\right) / 0{,}192 = 0{,}35$$

odnosno jednačine pravih:

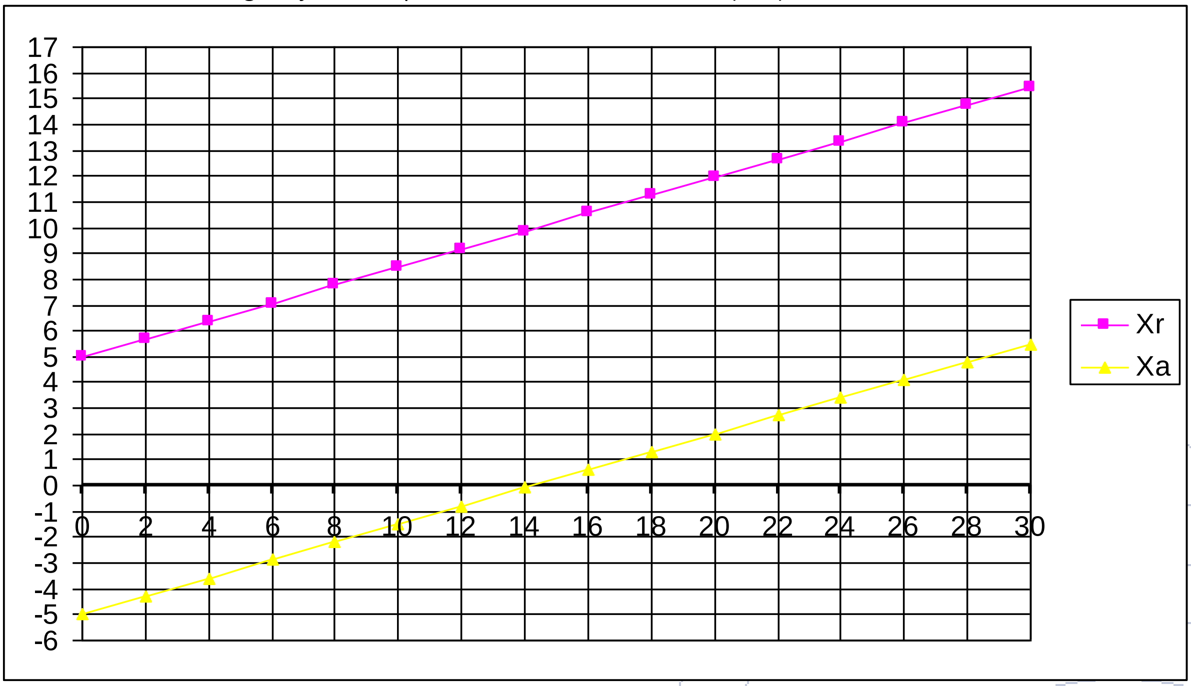
Xr= 4,973+0,35n

Xa= - 4,973+0,35n

Za prikaz Xr i Xa pravih dovoljno je proračunati bar dve tačke u kordinatnom sistemu (n, X) za svaku od pravih, npr za n=0 i za n=10 vrednosti su date u sledećoj tabeli.

n	Xr	Xa
0	4,972978	-4,97298
10	8,46187	-1,48409

Na osnovu navedenih vrednosti moguće je ucrtati prave u kordinatnom sistemu (n, X)



Slika 6. Grafik sekvencijalnog plana prijema

Iz prikaza se vidi da nije moguće prihvatiti seriju pre određene količine uzetog uzorka, jer su vrednosti za prihvatanje negativne. Minimalan broj defektnih u uzetom uzorku je praktično 0 tako da za ovu vrednost je moguće izračunati tačno vrednost n nakon koje je moguće prihvatati serije ako se u formuli za prihvatanje zameni Xa=0 tj.

-h1+sn=0

sn=h1

n=h1/s=14,25, kada se zaokruži na prvi veći ceo broj (uzorak je ceo broj) onda je seriju moguće prihvatati tek nakon 15 jedinice uzete u uzorku.

b) Doneti odluku o prihvatanju serije od isporučenih 1000 delova ako je nakon 8 ukupno pregledanih komada u uzorku otkriveno 6 defektnih. Kakva je odluka za slučaj otkrivanja 4 defektna dela u naredna 4 uzeta uzorka za kontrolu.

Za ukupno 8 pregledanih komada u uzorku i otkriveno 6 defektnih dobija se tačka u kordinatnom sistemu (8,6) koja se nalazi u zoni između broja za odbijanje (određuje ga prava Xr) i broja za prihvatanje (određuje ga pravaXa) koji je negativan u ovom slučaju tako da se donosi odluka o uzimanju dodatnog uzorka. (Videti prethodno dati grafik sekvencijalnog plana prijema)

Ako se uzmu dodatna 4 uzorka tj kumulativno 8+4=12; i ako je u dodatno uzetom uzorku pronađeno 4 defektna dela tj. kumulativno sa prethodnim 6+4, onda se dobija tačka u kordinatnom sistemu (12, 10), koja se nalazi iznad broja za prihvatanje koji određuje prava Xr, čime se donosi odluka o odbijanju serije. (Videti prethodno dati grafik sekvencijalnog plana prijema)

6. Za date vrednosti p1=0,01 i p2=0,1, α=0,05 i β=0,1 pripremiti dijagram sekvencijalnog plana prijema. Odrediti nakon koliko komada uzetih u uzorku je moguće prihvatiti seriju, a koliki bi bio broj za odbijanje ove serije u tom slučaju.

Xr= h2+sn (linija odbijanja)

Xa= - h1+sn (linija prihvatanja)

$$h_1 = \left(\log\frac{1-\alpha}{\beta}\right)/k$$

$$h_2 = \left(\log\frac{1-\beta}{\alpha}\right)/k$$

$$k = \log\frac{p_2(1-p_1)}{p_1(1-p_2)}$$

$$s = \left(\log\frac{1-p_1}{1-p_2}\right)/k$$

Zamenom vrednosti p1=0,01 i p2=0,1, α=0,05 i β=0,1 u prethodnim obrascima dobijaju se vrednosti:

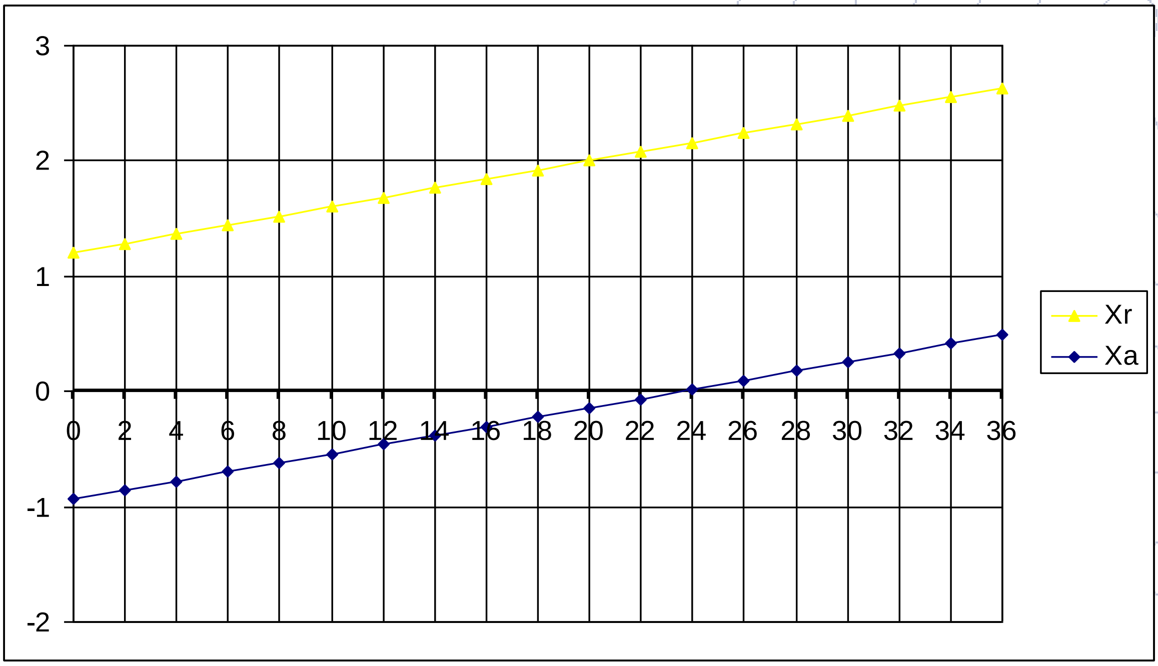
$$k = \log\frac{p_2(1-p_1)}{p_1(1-p_2)} = \log\frac{0{,}1(1-0{,}01)}{0{,}01(1-0{,}1)} = \log\frac{0{,}1\cdot 0{,}99}{0{,}01\cdot 0{,}9} = \log\frac{0{,}099}{0{,}009} = 1{,}04$$

$$h_1 = \left(\log\frac{1-\alpha}{\beta}\right)/k = \left(\log\frac{1-0{,}05}{0{,}1}\right)/1{,}04 = 0{,}939$$

$$h_2 = \left(\log\frac{1-\beta}{\alpha}\right)/k = \left(\log\frac{1-0{,}1}{0{,}05}\right)/1{,}04 = 1{,}205$$

$$s = \left(\log\frac{1-p_1}{1-p_2}\right)/k = \left(\log\frac{1-0{,}3}{1-0{,}4}\right)/1{,}04 = 0{,}04$$

odnosno jednačine pravih: Xr= 1,205+0,04n i Xa= - 0,939+0,04n



Slika 7. Grafik sekvencijalnog plana prijem

Za Xa=0 proizlazi n=0,939/0,04=23,475 tj. n=24. Može se zaključiti da sve do n=24 broj za prihvatanje je negativan tako da je prihvatanje serije moguće izvršiti tek nakon 24 uzetog uzorka.

Za n=24 može se izračunati vrednost Xr koja predstavlja tačku na liniji za odbijanje i to Xr=2,165, odnosno za vrednosti broja loših u uzorku od 24 komada, ako se ne pronađe ni jedan loš komad serija bi se prihvatila, za vrednosti 1 i 2 nastavilo bi se sa uzorkovanjem, a za vrednost defektnih 3 i više serija se odbija.